

Leçon 9.1

Oscillateur Généralisé

Dissipatif

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Oscillateur généralisé dissipatif
- Condition de Caughey
- Solution en base modale
- Solution approximée pour systèmes *pas* Caughey

Chapitre 12

Oscillateur Généralisé Dissipatif

Régime Libre

EPFL Oscillateur généralisé dissipatif et libre

Equation différentielle de l'*oscillateur généralisé* à n degrés de liberté en régime libre dissipatif

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [C]\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.1)$$

$\mathbf{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\mathbf{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\mathbf{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	matrice des masses
$[C]$	matrice des pertes
$[K]$	matrice de rigidité

Résolution du régime libre dissipatif par *changement de base*

$$\mathbf{x} = [B]\mathbf{q} \quad (12.2)$$

Reformulation du régime libre dissipatif par le changement de base

$$[M][B]\ddot{\mathbf{q}} + [C][B]\dot{\mathbf{q}} + [K][B]\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12.3)$$

Prémultiplication de l'expression du régime libre par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T[M][B]\ddot{\mathbf{q}} + [B]^T[C][B]\dot{\mathbf{q}} + [B]^T[K][B]\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12.4)$$

EPFL Oscillateur généralisé dissipatif et libre

Prémultiplication de l'expression du régime libre
par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T [M] [B] \ddot{\mathbf{q}} + [B]^T [C] [B] \dot{\mathbf{q}} + [B]^T [K] [B] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12.4)$$

Conditions pour un *découplage* des n équations
du régime libre dissipatif

$$\begin{cases} [M'] = [B]^T [M] [B] \\ [C'] = [B]^T [C] [B] \\ [K'] = [B]^T [K] [B] \end{cases} \quad (12.5)$$

avec $[M']$, $[C']$ et $[K']$ diagonales

EPFL Condition de Caughey

Condition nécessaire et suffisante d'existence
d'une matrice $[B]$ diagonalisant simultanément
 $[M]$, $[C]$ et $[K]$ – *Condition de Caughey*

$$\begin{aligned} &\text{Si } [M'], [C'] \text{ et } [K'] \text{ diagonales} \\ \Rightarrow &[M']^{-1}[C'] \text{ et } [M']^{-1}[K'] \text{ diagonales} \\ \Rightarrow &[M']^{-1}[C'] [M']^{-1}[K'] \\ &= [M']^{-1}[K'] [M']^{-1}[C'] \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &[B]^{-1}[M]^{-1}[C][M]^{-1}[K][B] \\ &= [B]^{-1}[M]^{-1}[K][M]^{-1}[C][B] \end{aligned} \quad (12.10)$$

$$\Rightarrow [C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C] \quad (12.11)$$

Condition suffisante mais non nécessaire
d'existence d'une matrice $[B]$ diagonalisant
simultanément $[M]$, $[C]$ et $[K]$

$$[M]^{-1}[C] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left[[M]^{-1}[K] \right]^i \quad (12.12)$$

Cas particulier de l'*amortissement* ou *frottement*
proportionnel

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[C] &= \alpha_0 [I] + \alpha_1 [M]^{-1}[K] \\ [C] &= \alpha_0 [M] + \alpha_1 [K] \end{aligned} \quad (12.13)$$

EPFL Systèmes satisfaisant Caughey

Conséquences d'un amortissement satisfaisant la condition de Caughey

- résolution du régime libre dissipatif selon la démarche modale des systèmes conservatifs
- matrice de changement de base $[B]$ identique à la matrice modale du système conservatif associé
- présence de n modes vibratoires amortis *réels*, qualifiés de classiques

Equation différentielle du *régime libre* pour un amortissement satisfaisant la condition de Caughey

$$[M^o] \ddot{\mathbf{q}} + [C^o] \dot{\mathbf{q}} + [K^o] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12.14)$$

avec

$$\begin{cases} [M^o] = [B]^T [M] [B] \\ [C^o] = [B]^T [C] [B] \\ [K^o] = [B]^T [K] [B] \end{cases} \quad (12.15)$$

$[M^o]$, $[C^o]$ et $[K^o]$ diagonales

EPFL Solution en Base Modale

Formulation canonique du *régime libre*
(prémultiplication par la matrice $[M^o]^{-1}$)

$$\ddot{\mathbf{q}} + [M^o]^{-1}[C^o]\dot{\mathbf{q}} + [M^o]^{-1}[K^o]\mathbf{q} = \mathbf{0}$$
$$\ddot{\mathbf{q}} + [2\Lambda]\dot{\mathbf{q}} + [\Omega_0^2]\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

avec

$$\begin{aligned}[2\Lambda] &= [M^o]^{-1}[C^o] \\ &= [B]^{-1}[M]^{-1}[C][B] \\ [\Omega_0^2] &= [\Delta] = [M^o]^{-1}[K^o] \\ &= [B]^{-1}[M]^{-1}[K][B]\end{aligned}\tag{12.18}$$

Découplage du système différentiel en n équations indépendantes (n oscillateurs élémentaires linéaires dissipatifs)

$$\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + \omega_{0p}^2 q_p = 0 \quad (12.19)$$

avec

$$\begin{aligned}2\lambda_p &= \frac{c_p^o}{m_p^o} \\ \omega_{0p}^2 &= \delta_p = \frac{k_p^o}{m_p^o}\end{aligned}\tag{12.17}$$

EPFL Solution en Base Modale

Intégration des n équations découplées

$$q_p = Q_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ (p = 1, 2, \dots, n) \quad (12.21)$$

Définition de la *pulsation propre* ω_p de rang p
du système *amorti*

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{0p}^2 - \lambda_p^2} = \omega_{0p} \sqrt{1 - \eta_p^2} \quad (12.22)$$

Définition des grandeurs caractéristiques par
analogie avec l'oscillateur élémentaire

λ_p coefficient d'amortissement *modal*

$$\eta_p = \frac{\lambda_p}{\omega_{0p}} \quad \text{amortissement relatif } \textit{modal} \text{ ou} \\ \text{facteur d'amortissement } \textit{modal}$$

Retour des coordonnées normales aux *coordonnées spatiales*

$$\mathbf{x} = [\mathbf{B}] \mathbf{q} \\ = \sum_p^n \mathbf{B}_p Q_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \quad (12.23)$$

$$= \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \quad (12.24) \\ \text{mode propre de rang } p$$

Conditions d'un *lâcher initial*

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos \varphi_p \quad (12.25-27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p (\omega_p \sin \varphi_p - \lambda_p \cos \varphi_p) \quad (12.26-28)$$

Prémultiplication des conditions initiales par le produit $\boldsymbol{\beta}_r^T [M]$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \mathbf{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos \varphi_p$$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \mathbf{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_p X_p (\omega_p \sin \varphi_p - \lambda_p \cos \varphi_p)$$

EPFL Solution en Base Modale

Extraction de l'*amplitude de référence* et de la
phase du mode de rang r

$$X_r \cos \varphi_r = \frac{1}{m_r^o} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \mathbf{X}_0 \quad (12.29)$$

$$X_r \sin \varphi_r = \frac{1}{m_r^o \omega_r} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] (\mathbf{V}_0 + \lambda_r \mathbf{X}_0) \quad (12.30)$$

Réponse du système aux conditions initiales

$$\vec{x}(t) = \sum_{p=1}^n \vec{\beta}_p X_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{m_p^o} \vec{\beta}_p e^{-\lambda_p t} \left(\vec{\beta}_p^T [M] \vec{X}_0 \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p} \vec{\beta}_p^T [M] (\vec{V}_0 + \lambda_p \vec{X}_0) \sin(\omega_p t) \right)$$

Commentaires sur les systèmes à amortissement classique

- les vecteurs modaux (vecteurs propres de la matrice $[B]$) sont identiques à ceux du système conservatif associé, dont ils possèdent les propriétés d'orthogonalité;
- les solutions du système dissipatif ont, à l'amortissement près, la même structure que celles du système conservatif
- l'amortissement relatif est différent pour chaque mode propre.

An aerial photograph of the EPFL campus in Lausanne, Switzerland. The image shows a large, modern building with a white, undulating roof and several circular skylights. The building is surrounded by other campus structures, including a long building with a colorful facade. In the background, the calm waters of Lake Geneva stretch towards the horizon, with the Jura mountains visible under a dramatic, cloudy sky at dusk or dawn. The EPFL logo is in the top left corner.

EPFL

**Approximation pour systèmes
PAS CAUGHEY**

EPFL Systèmes non-satisfaisant Caughey

Recherche d'une solution approchée

On calcule les modes propres et les valeurs propres pour le cas conservatif.

Alors on utilise un concept similaire au quotient de Rayleigh mais avec l'amortissement:

$$R_{\lambda}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \frac{\vec{u}^T [C] \vec{u}}{\vec{u}^T [M] \vec{u}}$$

$$\lambda_p = R_{\lambda}(\vec{\beta}_p) = \frac{1}{2} \frac{\vec{\beta}_p^T [C] \vec{\beta}_p}{\vec{\beta}_p^T [M] \vec{\beta}_p}$$